

Dev 17

lundi 17 janvier 2022 09:59

Dev n° 17

Ref: Garet, Kurtzman

"De l'intégration aux probabilités"
p296 à p298

Site: kuruu

Titre: Convergence de lois binomiales vers une loi de Poisson

Thm:

Soit, pour $n \geq 1$ une v.a. X_n suivant la loi binomiale de paramètre n et p_n . On s.q. $\lim_{n \rightarrow +\infty} np_n = \lambda > 0$.

Alors,

X_n cv. en loi vers la loi de Poisson de paramètre λ .

Lemme: (Scheffé)

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ e.m. et $f, (f_n)_{n \geq 1} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ des fonctions positives intégrables p.r à μ t.q.

a) $f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f$ μ -p.p.

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_{\Omega} f_n d\mu \right) = \int_{\Omega} f d\mu$

Alors,

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^1} f$$

Cor: (1)

Soient ν et $(\nu_n)_{n \geq 1}$ des mesures de proba. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ de densités f et $(f_n)_{n \geq 1}$ p.r à μ .

On s.q. $f_n \rightarrow f$ μ -p.p.

Alors, (ν_n) cv faiblement vers ν . (i.e. les v.a. cv en loi)

Cor: (2)

Soient x et $(x_n)_{n \geq 1}$ v.a. discrètes à valeurs dans $\underset{\mathbb{N}}{D}$ dénombrable.

On s.q.

$$\forall k \in \underset{\mathbb{N}}{D}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X = k)$$

Alors, $x_n \xrightarrow{\text{loi}} x$.

Démo: (Lemme)

On a $f + f_n = \max(f, f_n) + \min(f, f_n)$

et $|f - f_n| = \max(f, f_n) - \min(f, f_n)$

Donc,

$$f + f_n - |f - f_n| = 2 \min(f, f_n).$$

D'où:

$$|f - f_n| = f + f_n - 2 \min(f, f_n) = -f + f_n + 2(f - \min(f, f_n)).$$

Ainsi,

$$\|f_n - f\|_{L^1(\mu)} = \underbrace{\int_{\Omega} f d\mu}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0} + \int_{\Omega} f_n d\mu + 2 \int_{\Omega} \underbrace{(f - \min(f, f_n))}_{0 \leq \dots \leq f} d\mu$$

$$\|f_n - f\|_{L^1(\mu)} = \underbrace{\int_{\Omega} |f| d\mu + \int_{\Omega} |f_n| d\mu}_{\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{b)} 0} + 2 \int_{\Omega} \underbrace{|f - \min(f, f_n)|}_{\substack{0 \leq \dots \leq f \\ \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.p.} 0}} d\mu$$

$\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ par cv. dominié

□

Démo: 1)

Soit g continue et bornée sur Ω .

On a a) par l'énoncé et:

$$\int_{\Omega} f_n d\mu = \int_{\Omega} f d\mu = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n d\mu = \int_{\Omega} f d\mu \quad (\text{condition b) fermée})$$

Donc,

$$|\mathbb{E}[g(X_n)] - \mathbb{E}[g(X)]| \leq \int_{\Omega} |g(x)| |f_n(x) - f(x)| d\mu(x) \leq \|g\|_{\infty} \int_{\Omega} |f_n(x) - f(x)| d\mu(x)$$

$\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ par Scheffé

Comme cette cv a lieu $\forall g$ continue bornée, on a $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} X$ □

Démo: 2)

On a $P_{X_n}(A) = \sum_{k \in A} \underbrace{P(X_n = k)}_{f_n(k)}$ et $P_X(A) = \sum_{k \in A} \underbrace{P(X = k)}_{f(k)}$

P_{X_n} et P_X sont de densité f_n et f p.r à la mesure de comptage.

De plus, $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.p.} f$.

Donc, par le cor. 1) on a: $X_n \xrightarrow{\text{loi}} X$.

Démo: (thm)

Il suffit de m.q. $\forall k \geq 0, P(X_n = k)$ cv vers $e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ par le cor. 2)

On a:

$$\begin{aligned} P(X_n = k) &= \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\ &= \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^n (1-p_n)^{-k}. \end{aligned}$$

$$\text{Et: } \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \sim \frac{n^k}{k!}.$$

$$* n p_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \lambda \Rightarrow p_n \sim \frac{\lambda}{n} \text{ donc } 1-p_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1 \text{ et } p_n^k \sim \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \text{ et } (1-p_n)^k \sim 1$$

$$* \log(1-p_n)^n = n \log(1-p_n) = n(-p_n + o(p_n)) \sim -n p_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -\lambda.$$

$$\text{Donc, } (1-p_n)^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e^{-\lambda}$$

$$\text{Donc, } P(X_n = k) \sim \frac{n^k}{k!} \frac{\lambda^k}{n^k} e^{-\lambda} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

□

Annexe:

• On a en fait équivalence dans le cor. 2).

Démo:

... loi ...

- On a en fait équivalence dans le cor. 2).

Demo:

$$\boxed{\Leftarrow} X_n \xrightarrow{\text{loi}} X$$

On a donc $F_{X_n}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F_X(x)$, $\forall x$ pt de continuité.

F_{X_n} est discontinu $\forall k \in \mathbb{N}$.

Or $F_{X_n}(k) = F_{X_n}(x) \quad \forall x \in [k, k+1[$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Et ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_n = k) &= F_{X_n}(k) - F_{X_n}(k-1) \quad \left. \begin{array}{l} \text{ } \end{array} \right\} x \in]k-1, k[\\ &= F_{X_n}(x) - F_{X_n}(x-1) \quad \left. \begin{array}{l} \text{ } \end{array} \right\} F_{X_n} \text{ continue en } x \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} F_X(x) - F_X(x-1) \\ &= \mathbb{P}(X = k) \end{aligned}$$

D'où, $\mathbb{P}(X_n = k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X = k)$.

Def:

Soient (X_n) et X v.a. dans $\mathbb{R}^d$. (mais pas forcément sur la mêm e. proba.)

On a:

$$X_n \xrightarrow{d} X \stackrel{\text{def.}}{=} \mathbb{P}_{X_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{étroit.}} \mathbb{P}_X$$

$$\Leftrightarrow \forall g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d), \mathbb{E}[g(X_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[g(X)]$$

- cv $L^p \Rightarrow$ cv proba

Propriété (L^p implique en probabilité) — Soit $p \geq 1$. Si (X_n) et X sont dans L^p et si $X_n \xrightarrow{L^p} X$ alors $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.

Démonstration

[\[masquer\]](#)

C'est une application directe de l'inégalité de Markov pour les variables aléatoires réelles admettant un moment d'ordre p :

$$\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}[|X_n - X|^p]}{\varepsilon^p}$$

- cv proba $\Rightarrow$ cv loi

Propriété — Si X_n converge vers X en probabilité alors X_n converge vers X en loi.

Démonstration

[masquer]

C'est une conséquence du lemme précédent en prenant $X_n = X$ et en remarquant que la convergence en loi

$$d(X, Y_n) \xrightarrow{(d)} 0$$

dans $\mathbb{R}$ équivaut à la convergence en probabilité

$$Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$$

dans (E, d) .

Sinon, on peut procéder comme suit. Commençons par énoncer un lemme.

Lemme — Soient X, Y des variables aléatoires réelles, c un réel et $\varepsilon > 0$. Alors

$$\mathbb{P}(Y \leq c) \leq \mathbb{P}(X \leq c + \varepsilon) + \mathbb{P}(X - Y > \varepsilon)$$

En effet, il suffit de remarquer que :

$$\{Y \leq c\} \subset \{X \leq c + \varepsilon\} \cup \{X > c + \varepsilon, Y \leq c\}$$

L'inégalité en découle naturellement.

Pour tout $\varepsilon > 0$, en raison de ce lemme, on a :

$$\mathbb{P}(X_n \leq a) \leq \mathbb{P}(X \leq a + \varepsilon) + \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon)$$

$$\mathbb{P}(X \leq a - \varepsilon) \leq \mathbb{P}(X_n \leq a) + \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon)$$

On a donc

$$\mathbb{P}(X \leq a - \varepsilon) - \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \leq \mathbb{P}(X_n \leq a) \leq \mathbb{P}(X \leq a + \varepsilon) + \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon).$$

Soit a un point de continuité de F_X . On fixe un réel $\varepsilon' > 0$. Par continuité de F_X en a , il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que

$$|\mathbb{P}(X \leq a + \varepsilon) - \mathbb{P}(X \leq a)| < \varepsilon' \text{ et } |\mathbb{P}(X \leq a - \varepsilon) - \mathbb{P}(X \leq a)| < \varepsilon'.$$

De la convergence de $(X_n)_n$ en probabilité vers X , on peut en déduire l'existence d'un entier N tel que : $\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) < \varepsilon'$ si $n \geq N$.

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |\mathbb{P}(X_n \leq a) - \mathbb{P}(X \leq a)| < 2\varepsilon'$.

• Inégalité Markov :

Inégalité de Markov — Soit Z une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et supposée presque sûrement positive ou nulle. Alors

$$\forall a > 0, \quad \mathbb{P}(Z \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(Z)}{a}.$$

Démonstration

[masquer]

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On note $\mathbf{1}_{\{Z \geq a\}}$ la fonction indicatrice de l'événement $\{Z \geq a\}$.

On a l'inégalité :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad a \mathbf{1}_{\{Z(\omega) \geq a\}} \leq Z(\omega) \mathbf{1}_{\{Z(\omega) \geq a\}} \leq Z(\omega)$$

car Z est à valeurs positives ou nulles.

Par croissance de l'espérance, on a :

$$\mathbb{E}(a \mathbf{1}_{\{Z(\omega) \geq a\}}) \leq \mathbb{E}(Z) \quad (*)$$

Puis, par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(a \mathbf{1}_{\{Z(\omega) \geq a\}}) = a \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{Z(\omega) \geq a\}}) = a (1 \times \mathbb{P}(Z \geq a) + 0 \times \mathbb{P}(Z < a)) = a \mathbb{P}(Z \geq a)$$

En réinjectant l'expression dans l'inégalité (*), on obtient :

$$a \mathbb{P}(Z \geq a) \leq \mathbb{E}(Z)$$

c'est-à-dire

$$\mathbb{P}(Z \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(Z)}{a}$$

Généralisation:

Il existe une version plus générale de ce théorème. Soit X une variable aléatoire de $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ où Ω est l'ensemble des réalisations, $\mathcal{F}$ est la tribu des événements et $\mathbb{P}$ la mesure de probabilité. Alors, l'inégalité de Markov peut être énoncée de la façon suivante :

Inégalité de Tchebychev — Pour tout réel strictement positif α ,

$$\mathbb{P}(|X| \geq \alpha) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|^p)}{\alpha^p}$$

La démonstration tient entièrement au fait que pour tout α strictement positif, $\alpha^p \mathbf{1}_{\{|X| \geq \alpha\}} \leq |X|^p$. Ici, $\mathbf{1}_A$ désigne l'indicatrice de l'événement A . Par croissance de l'espérance, on obtient :

$$\mathbb{E}(|X|^p) \geq \mathbb{E}(\alpha^p \mathbf{1}_{\{|X| \geq \alpha\}}) = \alpha^p \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{|X| \geq \alpha\}}) = \alpha^p \mathbb{P}\{|X| \geq \alpha\}$$

En divisant de part et d'autre de l'inégalité par α^p on trouve le résultat recherché.

• Thm cv dominée:

Théorème — Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables sur un espace mesuré $(E, \mathcal{A}, \mu)$, à valeurs réelles ou complexes, telle que :

- la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f ;
- il existe une fonction intégrable g telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in E \quad |f_n(x)| \leq g(x).$$

Alors f est intégrable et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_n - f| d\mu = 0.$$

En particulier :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu = \int f d\mu$$

• Application:

$$B(n, p) + B(m, p) = B(n+m, p).$$

• règles sur les équivalents:

Produit [modifier | modifier le code]

Si $f_1 \sim_a g_1$ et $f_2 \sim_a g_2$ alors $f_1 f_2 \sim_a g_1 g_2$.

On en déduit, si $f \sim_a g$:

- pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $\lambda f \sim_a \lambda g$;
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^n \sim_a g^n$.

Composition à droite par une même fonction

Si $\lim_a h = b$ et si $f \sim_b g$ alors $f \circ h \sim_a g \circ h$.

Somme, différence [modifier | modifier le code]

Si $f_1 \sim_a g_1$ et $f_2 \sim_a g_2$ et si (au voisinage de a) g_1 et g_2 sont de même signe et ne s'annulent pas simultanément, alors $f_1 + f_2 \sim_a g_1 + g_2$.

Composition à gauche par le logarithme [modifier | modifier le code]

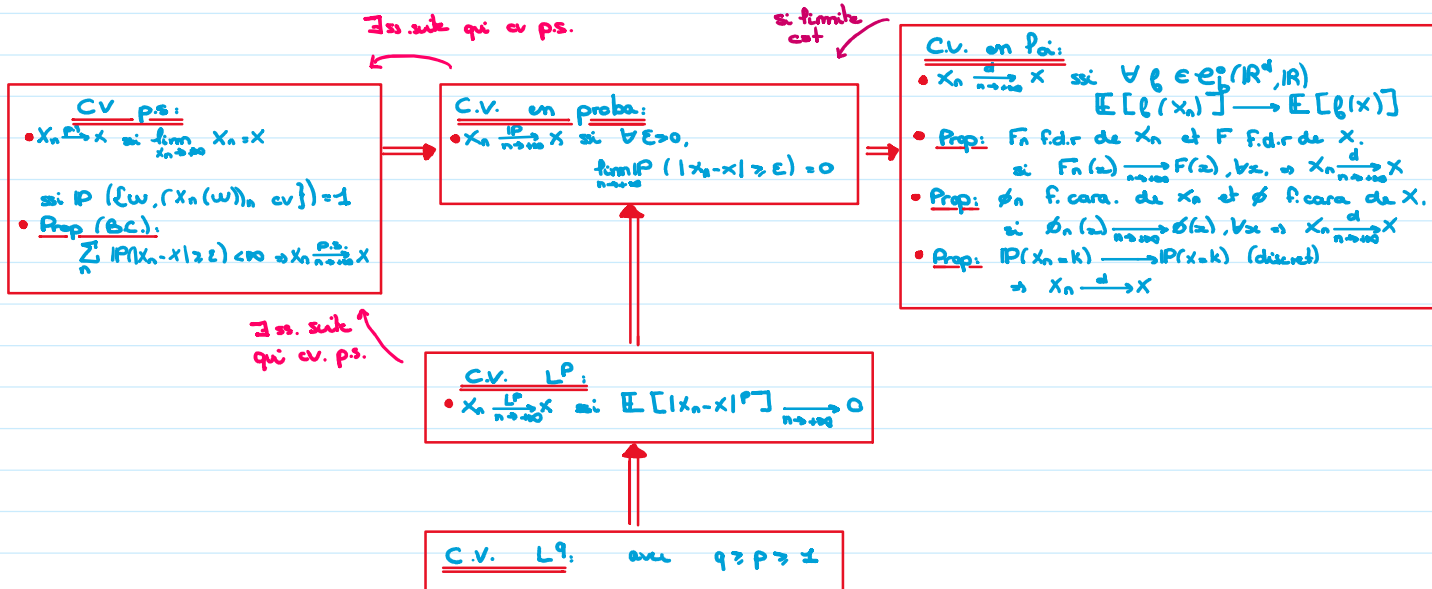
En supposant, pour que leurs logarithmes soient définis, que f et g sont strictement positives au voisinage de a :

si $f \sim_a g$ et si $\lim_a g = +\infty$ ou $\lim_a g = 0$ (ou plus généralement : si g « ne s'approche pas » de 1), alors $\ln \circ f \sim \ln \circ g$.

Composition à gauche par l'exponentielle [modifier | modifier le code]

$e^f \sim_a e^g \Leftrightarrow \lim_a (f - g) = 0$.

• Résumé :



Convergence de lois binomiales vers une loi de poisson

[17]

Thm:

$\forall n \geq 1, X_n \sim B(n, p_n)$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} np_n = \lambda > 0$.

Alors, $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{Poi}} X \sim P(\lambda)$

Lemme: (Scheffé)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ e. mesuré et $b, (b_n)_{n \geq 1}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ int. p.r à μ t.q.:

a) $b_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mu \cdot p \cdot p} b$ b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} b_n d\mu = \int_{\Omega} b d\mu$.

Alors, $b_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^1} b$

Cor: (1)

Soient ν et $(\nu_n)_{n \geq 1}$ m. de proba sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ de densité f et

$(f_n)_{n \geq 1}$. S.q. $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mu \cdot p \cdot p} f$.

Alors, $\nu_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{étroit}} \nu$.

Cor: (2)

$X, (X_n)_{n \geq 1}$ v.a.d. dans $\mathbb{N}$.

S.q. $\forall k \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow +\infty} IP(X_n = k) = IP(X = k)$

Alors, $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{Poi}} X$.

Démon: (Lemme)

On a:

$$f + f_n = \max(f, f_n) + \min(f, f_n)$$

$$\text{et } |f_n - f| = \max(f, f_n) - \min(f, f_n)$$

$$\Rightarrow f + f_n - |f_n - f| = 2 \min(f, f_n)$$

$$\Rightarrow |f_n - f| = f_n - f + 2(f - \min(f, f_n))$$

Donc, on a:

$$\|f_n - f\|_{L^1(\mu)} = \underbrace{\int_{\Omega} f_n d\mu - \int_{\Omega} f d\mu}_{\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{b) \rightarrow 0} 0} + 2 \underbrace{\int_{\Omega} (f - \min(f, f_n)) d\mu}_{\substack{\text{0} \leq \dots \leq f \text{ int} \\ \text{et a)} \\ \text{par cv dominée} \\ \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0}}$$

□

Démon: (1)

Soit $g \in C_b(\mathbb{R})$. Soient X_n et X v.a. associée à ν_n et ν .

On a f_n, f vérifiant a) par l'énoncé et b) par densité.

On a:

$$|E[g(X_n)] - E[g(X)]| \stackrel{T.T.}{=} \left| \int_{\Omega} g(f_n - f) d\mu \right|$$

$$\leq \|g\|_{\infty} \underbrace{\int_{\Omega} |f_n - f| d\mu}_{\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0} \quad \text{Lemme}$$

Donc, $\nu_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{étroit}} \nu$ □

Démon: (2)

On a pour $A \subset \mathbb{N}$:

$$IP_{X_n}(A) = \sum_{k \in A} \underbrace{IP(X_n = k)}_{=: f_n(k)} \quad \text{et} \quad IP_X(A) = \sum_{k \in A} \underbrace{IP(X = k)}_{=: f(k)}$$

IP_{X_n} et IP_X sont de densité f_n et f p.r à la mesure du comptage.

De plus, $b_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mu \cdot p \cdot p} b$.

Par 1), $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{Poi}} X$ □

Démon: (thm)

Par 2) il faut m.q. $\forall k \geq 0, IP(X_n = k) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

On a:

$$IP(X_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^n (1-p_n)^{-k}$$

Et:

$$* \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$$

$$* np_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \lambda \Rightarrow p_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad p_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n} \Rightarrow p_n^k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\lambda^k}{n^k}$$

$$* (1-p_n)^k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1$$

$$* \exp(n \log(1-p_n)) = \exp(n(-p_n + o(p_n))) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \exp(-\lambda)$$

$$\text{Donc, } IP(X_n = k) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!} \frac{\lambda^k}{n^k} e^{-\lambda} \quad \square$$